Devoir maison n° 12

À rendre le mardi 27 janvier

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. (*E3A PC 2020*)
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in\,]-1\,;1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}$.

4. Déterminer l'ensemble de définition réel de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$.

5. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner, pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

Exercice 2. (*d'après oral Mines-Ponts PC*)
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On considère la série entière $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif.
2. ★ Déterminer la valeur de R.
3. ★ On note χ_A polynôme caractéristique de A. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < R, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{tr}(A^n)z^n = \frac{1}{z}\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}.$$